# Interrogation n°6 — Corrigé (sujet A)

NOM : ................................................................ Prénom : ................................................................ Note :

**1)** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $F \subset E$. Donner une caractérisation de “$F$ est un s.e.v. de $E$”

Cf cours.

**2)** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v., $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ des vecteurs de $E$. Rappeler la définition de “$(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille libre”.

Cf cours.

**3)** Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (-3, 1, -2)$, $e_2 = (2, -2, 3)$ et $e_3 = (4, -1, 2)$. Rappeler la définition de “$(e_1, e_2, e_3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$” et vérifier que c'est bien le cas.

$(e_1, e_2, e_3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ si $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$.
L'inclusion $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset \mathbb{R}^3$ est évidente. Réciproquement, soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons que $u \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.
On cherche donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = (x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -3\alpha + 2\beta + 4\gamma = x \\ \alpha - 2\beta - \gamma = y \\ -2\alpha + 3\beta + 2\gamma = z \end{cases} \quad \begin{cases} -4\beta + \gamma = x + 3y & L_1 + 3L_2 \\ \alpha - 2\beta - \gamma = y & \\ -\beta = z + 2y & L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -z - 2y \\ \gamma = x + 3y + 4(-z - 2y) \\ \alpha = 2\beta + \gamma + y \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -z - 2y \\ \gamma = x - 5y - 4z \\ \alpha = (\dots) = x - 8y - 6z \end{cases}$$

Ainsi, on peut poser $\alpha, \beta, \gamma$ comme ci-dessus et vérifier que $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. D'où $u \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. On en déduit que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

# Interrogation n°6 — Corrigé (sujet B)

NOM : ................................................................ Prénom : ................................................................ Note :

**1)** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v., $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ des vecteurs de $E$. Rappeler la définition de "$(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille liée".

Cf cours.

**2)** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v., $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ des vecteurs de $E$. Rappeler la définition ensembliste de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$.

Cf cours

**3)** Soit $E$ l'ensemble des polynômes réels $P$ tels que $P(X) = P(-X)$ et $P'(1) = 0$. Montrer que $E$ est un e.v.

Montrons que $E$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$.

- On pose $P = 0$. Montrons que $P \in E$. On a trivialement $P(X) = 0 = P(-X)$ et comme $P' = 0$, on a $P'(1) = 0$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$. Montrons que le polynôme $R := \alpha P + \beta Q$ est dans $E$.

$$\begin{aligned} R(X) &= (\alpha P + \beta Q)(X) = \alpha P(X) + \beta Q(X) \\ &= \alpha P(-X) + \beta Q(-X) \\ &= (\alpha P + \beta Q)(-X) \\ &= R(-X) \end{aligned}$$

De plus, $R' = \alpha P' + \beta Q'$ donc $R'(1) = \alpha P'(1) + \beta Q'(1) = 0 + 0 = 0$. Ainsi, $R \in E$.

Ainsi, $E$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$ donc est un $\mathbb{R}$-e.v.